

Matematică

pentru performanță

cls. a V-a

*Dacă gândești că poți,
dacă gândești că nu poți,
tot timpul vei avea dreptate!*

Henry Ford

<i>Argumente</i>	4
<i>Lista autorilor</i>	6
<i>Sugestii pentru tine</i>	8
<i>Ce aduce nou matematica clasa a V-a?</i>	9
<i>Cele 13 + 2 strategii</i>	10
<i>Găsește și rezolvă ecuația</i>	23
<i>Folosește o formulă</i>	30
<i>Numerele naturale și operațiile cu ele</i>	38
<i>Împărțirea cu rest a numerelor naturale</i>	45
<i>Pătrate perfecte</i>	54
<i>Puteri cu exponent număr natural</i>	61
<i>Relații de ordine (I)</i>	66
<i>Mulțimi</i>	73
<i>Divizibilitatea numerelor</i>	82
<i>Fracții</i>	93
<i>Numere cu virgulă și operațiile cu ele</i>	99
<i>Relații de ordine (II)</i>	106
<i>Paritatea numerelor naturale</i>	115
<i>Probleme de numărare</i>	120
<i>Alte baze de numerație</i>	129
<i>Ultimele cifre ale unui număr natural</i>	134
<i>Partiția unei mulțimi</i>	140
<i>Sume</i>	144
<i>Principiul cutiei</i>	148
<i>Descoperă o regulă!</i>	152
<i>Probleme de mișcare</i>	157
<i>Elemente de geometrie</i>	162
<i>Unități de măsură</i>	167
<i>Probleme ca la concursuri</i>	171
<i>Soluții comentate</i>	179
<i>Bibliografie</i>	317

Cea mai utilizată strategie din gimnaziu este:

Găsește și rezolvă ecuația

În clasele primare, prin realizarea unui desen adecvat, metoda figurativă înlesnea și îndruma gândirea rezolvitorului spre aflarea soluției problemei.

Numere cunoscute și numărul (numerele) necunoscut(e) era astfel „legate” printr-o relație de egalitate.

Se realizează un pas important, determinant, spre înțelegerea, exprimarea și scrierea unei ecuații.

Acum, încă din primele clase ale gimnaziului elevul are la dispoziție o cale regală prin care poate rezolva o bună parte din problemele cu care se întâlnește.

Numărului necunoscut i se atribuie proprietăți noi, legate de determinarea ansamblului (mulțimii) de valori posibile.

De aceea, profesorul de matematică va utiliza denumirea de *variabilă**, legând mereu necunoscuta de mulțimea pe care ea poate lua valori.

Indiciile care ne îndreaptă spre alegerea strategiei de rezolvare „Găsește și rezolvă ecuația” sunt:

- o variabilă este introdusă prin enunț;
- în enunț apar expresii ca „egal cu” sau „egal”;
- condițiile stabilite pot fi cu ușurință reprezentate printr-o egalitate în care participă numere cunoscute și necunoscute.

Problemă

Câțiva copii vor să cumpere o minge de fotbal. Dacă fiecare dintre ei contribuie cu 50 de lei, le mai trebuie 80 de lei. Dacă fiecare dă câte 70 de lei rămân 80 de lei.

Câți copii s-au hotărât să cumpere mingea?

Pasul 1

Înțelege problema

Prețul mingii este dat de produsul dintre contribuția reală a fiecărui copil și numărul de copii.

variabilă – număr nedeterminat al cărui ansamblu de valori posibile este determinat.

Sunt prezentate două variante cu situațiile în care fiecare copil contribuie cu o sumă mai mică decât cea necesară, respectiv, mai mare.

Pasul 2

Fă-ți un plan

Condițiile prezentate în enunț *sugerează o egalitate*, deci vom încerca să găsim o ecuație.

Numărul (necunoscut) de copii care participă la acțiune îl vom utiliza pentru scrierea ecuației și în rezolvarea ei.

Pasul 3

Utilizează planul făcut

Așa cum ar trebui să intuiești, notăm cu x numărul copiilor care vor să cumpere mingea. Scriem ecuația:

$$50 \cdot x + 80 = 70 \cdot x - 80$$

Utilizând principiile balanței, avem succesiv:

$$50 \cdot x + 80 + 80 = 70 \cdot x, \text{ apoi}$$

$$160 = 70 \cdot x - 50 \cdot x, \text{ de unde}$$

$$20 \cdot x = 160 \text{ și imediat aflăm numărul de copii care vor să cumpere mingea: } x = 8.$$

Pasul 4

Întoarce-te la enunț

Soluția verifică toate condițiile din enunț.

Ne putem pune întrebarea: Care este prețul mingii? și aflăm imediat:

$$50 \cdot 8 + 80 = 480 \text{ lei.}$$

Putem afla și contribuția fiecăruia dintre cei 8 copii:

$$480 : 8 = 60 \text{ lei.}$$

Găsește câte o ecuație și rezolv-o pentru a afla soluția fiecăreia dintre următoarele probleme.

1. Află numărul $abcde$, din baza 10, știind că dacă adăugăm cifra 8 la sfârșitul numărului obținem un număr de 4 ori mai mic decât dacă punem pe 8 la începutul numărului.

2. — La mulți ani, bunicule, și să ajungi sănătos la 100 de ani!

Bunicul îi răspunde nepotului:

— Mulțumesc, dar când ai venit tu pe lume eu aveam cu un an mai mult decât împătritul vârstei tale de acum, așa că numai dacă voi mai trăi încă cu 3 ani mai mult decât ai trăit tu până acum, abia atunci am să ajung la 100 de ani!

Câți ani are bunicul?

3. Într-o cutie de chibrituri există câteva bețe. Dublăm numărul lor și scoatem 8 bețe, apoi dublăm numărul chibriturilor rămase și din nou scoatem 8. După ce repetăm a treia oară procedeul, cutia se golește.

Câte bețe erau inițial în cutie?

4. Trei prinți au luptat cu un balaur cu multe capete. Primul prinț a tăiat cu mâna dreaptă jumătate din capetele balaurului și încă două capete cu mâna stângă. Al doilea prinț, cu mâna dreaptă a tăiat jumătate din capetele rămase ale balaurului și cu mâna stângă încă două. Al treilea a tăiat cu mâna dreaptă jumătate din capetele rămase și cu mâna stângă ultimele două capete ale balaurului.

Câte capete a avut balaurul?

5. Anca are cinci cutii conținând 30, 31, 32, 33 și 34 de bomboane, iar Cornelia trei cutii cu 39, 40 și 41 de bomboane.

Zilnic fiecare dintre fetițe mănâncă câte o bomboană aleasă la întâmplare dintr-o cutie ce-i aparține.

După un timp, se constată o situație interesantă. Fiecare dintre cele 8 cutii conține același număr de bomboane.

Câte?

Soluții și comentarii

1. Cum numărul necunoscut din această problemă este chiar numărul $\overline{abcde}$, egalitatea sugerată de enunț $4 \cdot \overline{abcde}8 = 8\overline{abcde}$ ne conduce la ecuația:

$$4(10 \cdot \overline{abcde} + 8) = 800000 + \overline{abcde}$$

$$\text{adică: } 39 \cdot \overline{abcde} = 799068,$$

de unde aflăm numărul căutat:

$$\overline{abcde} = 20512.$$

$$\text{Într-adevăr, } 4 \cdot 205128 = 820512.$$

2. Alegerea necunoscutei este, adeseori, ea însăși o problemă. În această problemă avantajos este să considerăm vârsta nepotului din prezent necunoscuta.

Așadar, în prezent:

– nepotul are x ani

– acum x ani, conform spuselor lui, bunicul avea $4 \cdot x + 1$ ani,

deci acum are $5 \cdot x + 1$.

– cum peste $x + 3$ ani bunicul va avea 100 de ani, obținem ecuația:

$$5 \cdot x + 1 + x + 3 = 100$$

Așadar, nepotul are $x = 16$ ani, iar bunicul $5 \cdot x + 1 = 81$ ani.

3. Pentru rezolvarea problemei avem nevoie să combinăm această strategie cu strategia **Utilizează mersul înapoi**.

Vom considera necunoscuta x numărul de bețe inițial.

Enunțul ne permite să scriem ecuația: $2 \cdot [2 \cdot (2 \cdot x - 8) - 8] - 8 = 0$.

Avem „mergând înapoi”:

$$2 \cdot [2 \cdot (2 \cdot x - 8) - 8] = 8$$

$$2 \cdot (2 \cdot x - 8) - 8 = 4$$

$$2 \cdot (2 \cdot x - 8) = 12$$

$$2 \cdot x - 8 = 6$$

$$2 \cdot x = 14$$

$$x = 7$$

Așadar, inițial în cutie erau 7 bețe de chibrit.

4. Problema se poate rezolva prin metoda figurativă.

Dacă vrei să utilizezi o ecuație, atunci notează cu x numărul total al capetelor balaurului. De folos îți va fi o organizare ori tabel de felul:

	capete tăiate	capete rămase
primul priț	$x:2+2$	$x:2-2$
al doilea primul	$(x:2-2):2+2$	$(x:2-2):2+2$
al treilea primul	$[(x:2-2):2-2]:2+2$	$[(x:2-2):2-2]:2-2$

Cum problema spune că după acțiunea celui de al treilea priț balaurul a rămas fără vreun cap, obținem ecuația:

$$[(x:2-2):2-2]:2-2=0$$

Utilizăm acum, mersul înapoi și avem succesiv ecuațiile:

$$[(x:2-2):2-2]:2=2$$

$$(x:2-2):2-2=4$$

$$(x:2-2):2=6$$

$$x:2-2=12$$

$$x:2=14$$

$$x=28$$

Balaurul a avut 28 de capete.

5. **Indiciu:** În enunț apare expresia: *fiecare* din cele 8 cutii conține același (un număr egal) de bomboane.

Vom considera necunoscut numărul de zile după care în fiecare cutie este același număr de bomboane.

Cum inițial Anca avea: $30+31+32+33+34=160$ de bomboane,

iar Cornelia: $39+40+41=120$ de bomboane.

Vom putea scrie ecuația: $(160-x):5=(120-x):3$

de unde se obține imediat $x=60$.

În fiecare cutie mai sunt: $[(160+120)-2\cdot60]:8=20$ de bomboane.

Strategia *Găsește și rezolvă ecuația* utilizează cu succes:

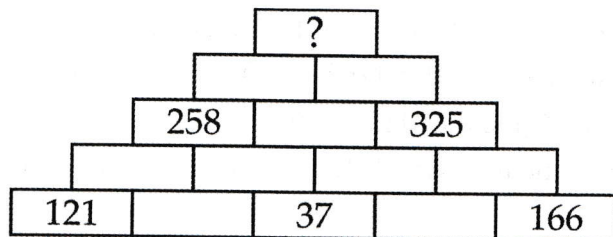
- principiul balanței;
- principiul mijloacelor și procedeele minime, vezi capitolele corespunzătoare din „Matematica de concurs pentru clasele III – IV”.

Strategia se armonizează cu strategiile:

- Utilizează mersul înapoi;
- Utilizează o formulă;
- Utilizează un raționament direct;
- Utilizează proprietățile numerelor;
- Studiază toate cazurile posibile.

Rezolvă următoarele probleme de concurs utilizând ecuații:

1. Acum suma vârstelor fiului, tatălui și bunicului este 108 ani. Când fiul avea 8 ani, tatăl avea 30 ani, iar când tatăl a avut 28 ani, bunicul avea 56 ani.
Ce vârstă are fiecare?
2. Într-o zi, numărul total elevilor absenți din două clase paralele a fost de 13 ori mai mic decât numărul elevilor prezenți. A doua zi, unul dintre absenți a venit la școală și astfel numărul prezenților a fost de 20 de ori mai mare decât numărul absenților.
Determină numărul total al elevilor din cele două clase.
3. Pe fiecare „cărămidă” numărul ce trebuie scris este egal cu suma numerelor de pe „cărămizile” pe care se sprijină.
Ce număr trebuie scris pe „cărămida” de sus?



4. Scribe numărul $99^{100} + 561$ ca o sumă de 33 de numere naturale consecutive.

5. Suma a patru numere este 88. Dacă scad din fiecare același număr, obțin numerele 8, 15, 10 și 35.
Află cele patru numere.

6. Pe o consolă video, George trage în baloane. Dacă nimerește un balon, acela dispare. Dacă nu-l nimerește mai apare un balon. Jocul se încheie când dispar toate baloanele.
Câte baloane a nimerit și câte nu, dacă jocul s-a terminat după 39 de încercări?

7. Albă-ca-Zăpada și cei 7 pitici au cules împreună 224 de mure. În ordinea vârstei lor fiecare pitic a cules cu o mură mai mult decât cel imediat mai mic decât el.
Arată că dacă Alba-ca-Zăpada a cules același număr de mure cu unul dintre pitici, atunci acela este piticul mijlociu.

8. În momentul în care în acea dimineață *Fantoma* a intrat în biblioteca castelului, acele vechi pendule au început să se rotească cu vitezele lor inițiale dar în sens invers. Astfel, când Sir John a intrat ca de obicei, la fix ora 5 după-amiază, să-și savureze ceaiul, pendula arăta ora 7 și 30 de minute.
La ce oră a vizitat în acea dimineață, *Fantoma*, biblioteca contelui?

9. Tanti Maria are 8 găini. Unele fac ouă în fiecare zi, altele o dată la două 2 zile, iar restul o dată la trei zile. Numărul celor din urmă este o treime din numărul celorlalte două împreună. Într-o zi de luni, tanti Maria găsește 8 ouă și până sâmbătă seara (deci în șase zile) adună 31 ouă.
Câte găini, de fiecare rasă, are tanti Maria?

Cunoscută, sau pe loc descoperită în rezolvarea problemei:

Folosește o formulă

Această strategie este o extindere și o perfecționare a strategiei „Caută o regulă”. Enunțul unei formule este efectul unui (lung) proces inductiv de generalizare a unor cazuri particulare.

Formula este o scriere condensată ce folosește numai simboluri matematice. Este formată din expresia matematică și prezentarea situației, adică a **condițiilor în care este valabilă**. Este un fel de program informatic.

Găsirea unei reguli îți va permite să determini al 100-lea termen din înșiruirea: 2, 6, 12, 20, ... Cu puțină investigație poți stabili că **formula** $T_n = n \cdot (n + 1)$ dă valoarea celui de-al n -lea termen din șir.

Conform formulei al 100-lea termen este $100 \cdot 101 = 10100$.

Indiciile care sugerează că strategia „Folosește o formulă” este potrivită:

- problema sugerează o regulă care poate fi generalizată;
- idei precum rată, procent, distanță, arie, volum sau alte valori ale unor măsurători sunt implicate;
- sunt implicate aplicații din știință, economie, afaceri;
- sunt probleme care include probabilități, statistici.

Problemă

La un turneu de șah participă băieți și fete, astfel încât fiecare participant a jucat o partidă cu fiecare dintre ceilalți. Se știe că băieții au disputat între ei 15 partide, iar în total s-au jucat 45 de partide.

Calculează câți băieți și câte fete au participat la turneu.

Pasul 1

Înțelege problema

În enunț sunt detaliate regulile turneului, fiecare participant joacă cu fiecare câte o singură partidă.

Pasul 2

Fă-ți un plan

Problema sugerează o regulă de determinare a numărului de jocuri între n -participanți care ar putea fi folosită pentru a afla suma totală de participanți și a numărului de băieți. Ar trebui să ști *formula* sau s-o descoperi.

Pasul 3

Utilizează planul făcut

Observăm că dacă între k participanți vor avea loc T_k partide, dacă se mai adaugă un participant acesta va juca cu toți ceilalți, deci vor avea loc în total, $T_{k+1} = T_k + k$ partide

Așadar, între n participanți se vor juca:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) \text{ partide}$$

Scriind altfel: $T_n = (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$ și adunând membru cu membru cele două sume obținem:

$$2 \cdot T_n = \underbrace{n + n + \dots + n}_{\text{de } n-1 \text{ ori}} \text{ de unde se stabilește imediat că}$$

numărul de partide dintre n jucători este $T_n = n \cdot (n-1) : 2$.

Am descoperit așadar *formula* necesară continuării rezolvării.

Revenind la datele problemei, dacă băieți au jucat $15 = (5 \cdot 6) : 2$ partide între ei, înseamnă că la turneu au participat 6 băieți.

Dacă în total s-au jucat $45 = (9 \cdot 10) : 2$ partide, înseamnă că au fost (în total) 10 participanți.

Numărul fetelor participante a fost $10 - 6 = 4$.

Pasul 4

Întoarce-te la enunț.

Formula folosită este cunoscută în lumea matematicii ca suma primelor n numere naturale sau suma descoperită de (micul) Gauss.